Grundwissen	Beispiele

M8 1. Funktionale Zusammenhänge

Proportionalität

a) Direkte Proportionalität

Wird dem Doppelten, Dreifachen, …, k-Fachen einer Größe x das Doppelte, Dreifache, …, k-Fache einer Größe y zugeordnet, so sind x und y zueinander (direkt) **proportionale** Größen.

Bei dieser Zuordnung gilt: $\boldsymbol{\frac{y}{x} = m}$ mit festem m. Die Wertepaare (x | y) sind also **quotientengleich**.

Die Funktionsgleichung lautet: $\boldsymbol{y = m \cdot x}$

Der Graph einer solchen direkten Proportionalität ist eine **Ursprungsgerade** mit Steigung m.

Die Tabelle

x	3,6	7,2	8,1	10,8	11,7
y	0,4	0,8	0,9	1,2	1,3

zeigt zueinander **direkt proportionale** Größen, sie sind quotientengleich m = 9.

b) Indirekte Proportionalität

Wird dem Doppelten, Dreifachen, …, k-Fachen einer Größe x die Hälfte, ein Drittel, …, der k-te Teil einer Größe y zugeordnet, so sind x und y zueinander **indirekt proportionale** Größen.

Bei dieser Zuordnung gilt: $\boldsymbol{y \cdot x = a}$ mit festem a. Die Wertepaare (x | y) sind also **produktgleich**.

Die Funktionsgleichung lautet: $\boldsymbol{y = \frac{a}{x}} \quad D = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$

Der Graph einer solchen indirekten Proportionalität ist eine **Hyperbel**.

Die Tabelle

x	0,8	1,6	3	3,2	3,5
y	105	52,5	28	26,25	24

zeigt zueinander **indirekt proportionale** Größen, sie sind produktgleich a = 84.

Kreis

a) Kreisumfang

Die Kreiszahl Pi: $\quad \pi \approx 3{,}14$

π ist eine irrationale Zahl.

Der **Umfang u** des Kreises und sein **Radius r** sind **direkt proportionale Größen**:

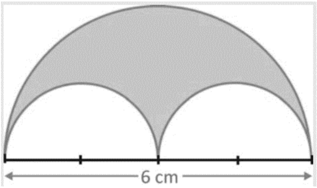
$$\boldsymbol{u = 2 \cdot r \cdot \pi \; bzw. u = d \cdot \pi}$$

(d: Durchmesser mit $d = 2 \cdot r$)

b) Kreisfläche

Der **Flächeninhalt A** ist eine quadratische Funktion des Radius r, d. h. verdreifacht man den Radius, so verneunfacht sich der Flächeninhalt:

$$\boldsymbol{A = r^2 \cdot \pi}$$



$r_g = 3cm \; und \; r_k = 1{,}5cm$

Der **Umfang** der Figur berechnet sich durch die Summe aus dem Umfang des großen Halbkreises und dem Umfang des kleinen Kreises:

$U_{HKg} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3cm \cdot \pi = 3\pi cm$

$U_{Kk} = 2 \cdot 1{,}5cm \cdot \pi = 3\pi cm$

$U_{gesamt} = 3\pi cm + 3\pi cm = 6\pi cm \approx 18{,}85cm$

Der **Flächeninhalt** der Figur berechnet sich aus der Differenz zwischen großem Halbkreis und der Summe der beiden kleinen Halbkreise:

$$A_{HKg} = \frac{1}{2}(3cm)^2\pi = 4{,}5\pi cm^2$$

$$A_{HKk} = \frac{1}{2}(1{,}5cm)^2\pi = 1{,}125\pi cm^2$$

$$\begin{aligned} A_{gesamt} &= 4{,}5\pi cm^2 - 2 \cdot 1{,}125\pi cm^2 \\ &= 2{,}25\pi cm^2 \approx 7{,}07cm^2 \end{aligned}$$

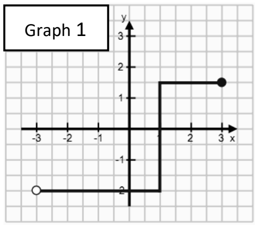
Funktionen und Funktionsterme

Eine **Funktion** ist eine **eindeutige Zuordnung**: Jedem Wert aus der Definitionsmenge D wird genau ein Wert aus der Wertemenge W zugeordnet.

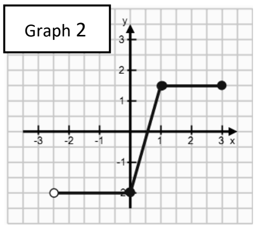
Ist f eine Funktion und sind x und y einander zugeordnete Werte, dann schreibt man kurz:

$f: x \mapsto y$	für die **Zuordnungsvorschrift**
$f(x)$	für den **Funktionsterm**
$y = f(x)$	für die **Funktionsgleichung**
D_f und W_f	für **Definitions**- und **Wertemenge**

Funktionen können durch Wertetabellen, Pfeildiagramme und Funktionsgraphen veranschaulicht werden.



Der Graph 1 gehört zu keiner Funktion, denn es werden dem x-Wert 1 mehrere y-Werte zugeordnet.



Der Graph 2 gehört zu einer Funktion, denn jede Parallele zur y-Achse schneidet den Graphen in höchstens einem Punkt.

$D_f =]2{,}5; 3]$

$W_f = [-2; 1{,}5]$

Lineare Funktion

Funktionsterm: $f(x) = m \cdot x + t$ mit $m, t \in \mathbb{Q}$ und $D_f = \mathbb{Q}$.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**, welche die y-Achse im Punkt T (0|t) schneidet.

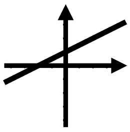
Man nennt daher **t** den **y-Achsenabschnitt** der Geraden. **m** ist die **Steigung** der Geraden. Für die **Nullstelle** x_N von f gilt: $f(x_N) = 0$.

Verläuft die Gerade durch die Punkte $P(x_p|y_P)$ und $Q(x_q|y_q)$ mit $x_p \neq x_q$, so gilt für die Geradensteigung:

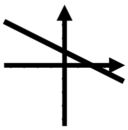
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{senkrechte\ Kathete\ des\ Steigungsdreiecks}{waagrechte\ Kathete\ des\ Steigungsdreiecks}$$

Man unterscheidet:

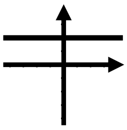
- steigende (m > 0)

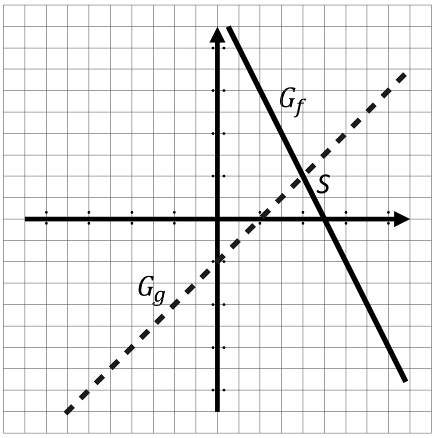


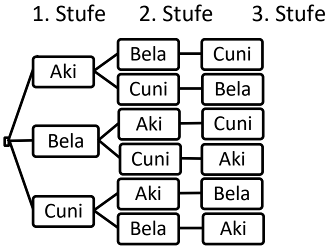
- fallende (m < 0)



- zur x-Achse parallele Geraden (m = 0)



Lineare Gleichungssysteme Zwei lineare Gleichungen, die zwei Variablen enthalten, bilden ein lineares Gleichungssystem.	(I) $2x + y = 5$ (II) $x - y = 1$
a) Graphisches Lösungsverfahren: Zu jeder der beiden Gleichungen existieren unendlich viele Lösungen. Sie lassen sich durch Punkte des Graphen der entsprechenden linearen Funktion veranschaulichen. Die Koordinaten des **Schnittpunkts** $\boldsymbol{S(x_s \mid y_s)}$ beider Graphen erfüllen als einzige beide Gleichungen. Sie bilden also zusammen die **Lösung des Gleichungssystems**, dessen Lösungsmenge $L = \{(x_s \mid y_s)\}$ ist. Ein lineares Gleichungssystem hat **keine Lösung** → **parallele** Geraden oder **genau eine** Lösung → **Schnittpunkt** der Geraden oder **unendlich viele Lösungen** → **identische** Geraden	Als Funktionsgleichungen haben die obigen Gleichungen die Form (I*) $y = f(x) = -2x + 5$ (II*) $y = g(x) = x - 1$ 
b) Rechnerische Lösungsverfahren:	$S(2 \mid 1)$ →$L = \{(2 \mid 1)\}$
- ***Additionsverfahren***: - Addition eines geeigneten Vielfachen der einen Gleichung zur anderen Gleichung so, dass eine Variable eliminiert wird - Lösung der entstandenen Gleichung mit nur einer Variablen - Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und ermitteln der anderen Variablen - Angeben der Lösungsmenge	$-2 \cdot (II)$: $-2x + 2y = -2$ $+(I)$ $2x + \quad y = 5$ → $3y = 3$ → $y = 1$ $und\ x = 2$ $L = \{(2 \mid 1)\}$
- ***Einsetzungsverfahren***: - Auflösen einer der Gleichungen nach einer Variablen - Einsetzen des gefundenen Terms in die andere Gleichung - Lösen der so entstandenen Gleichung, die nur noch eine Variable enthält - Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und Ermitteln der anderen Variablen - Angeben der Lösungsmenge	Aus (II) $x = 1 + y$ in (I) $2(1 + y) + y = 5$ $2 + 2y + y = 5$ $3y = 3$ $y = 1$ $und\ x = 2$ $L = \{(2 \mid 1)\}$

- ***Gleichsetzungsverfahren*** - Auflösen beider Gleichungen nach derselben Variablen - Gleichsetzen der beiden neuen rechten Seiten - Lösen der so entstandenen Gleichung, die nur noch eine Variable enthält - Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und Ermitteln der anderen Variablen - Angeben der Lösungsmenge	Aus (II) $y = x - 1$ Aus (I) $y = 5 - 2x$ $x - 1 = 5 - 2x$ $3x = 6$ $x = 2$ $und \; y = 1$ $L = \{(2\|1)\}$
M8 2.Stochastik: Laplace-Experimente	
Ein **Zufallsexperiment** ist ein Experiment, bei dem verschiedene Ergebnisse möglich sind, dessen Ausgang rein zufällig ist und das beliebig wiederholt werden kann. Die Menge Ω aller Ergebnisse nennt man **Ergebnisraum**/-**menge**. Sind alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments gleich wahrscheinlich, spricht man von einem **Laplace-Experiment**. Ein **Ereignis** ist eine Zusammenfassung von Ergebnissen. Bei einem Laplace-Experiment kann man die **Wahrscheinlichkeit** für ein Ereignis A berechnen durch $P(A) = \frac{Anzahl\ der\ für\ A\ günstigen\ Ergebnisse}{Anzahl\ der\ überhaupt\ möglichen\ Ergebnisse}$	Werfen eines (Laplace-)Würfels: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ Ereignis A: „Es wird eine gerade Augenzahl gewürfelt.“ $A = \{2; 4; 6\}$ **Gegenereignis** zu A: „Es wird eine ungerade Augenzahl gewürfelt.“ $\overline{\boldsymbol{A}} = \{1; 3; 5\}$ $P(A) = \frac{\|A\|}{\|\Omega\|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Zählprinzip Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Anzahl aller möglichen Ergebnisse, indem man die **Anzahl** der Möglichkeiten der **einzelnen Stufen** miteinander **multipliziert**.	**A**ki, **B**ela, **C**uni stellen sich in einer Reihe nebeneinander auf. Um die Anzahl der Möglichkeiten zu bestimmen, wie die Drei stehen können, kann man ein **Baumdiagramm** verwenden:  Oder das **Zählprinzip** anwenden: Mit dem Zählprinzip gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten. Diese sind: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

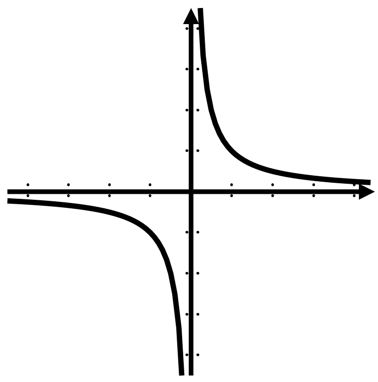
M8 3. Elementare gebrochen-rationale Funktionen und Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Gebrochen-rationale Funktionen
Die Funktionsterme gebrochen-rationaler Funktionen enthalten im Nenner die unabhängige Variable x. Für diejenigen x-Werte, für die der Nenner null wäre, ist die Funktion nicht definiert. Der Graph hat hier in der Regel eine **Polstelle**.
Die Graphen gebrochen-rationaler Funktionen sind **Hyperbeln**.

Die **indirekte Proportionalität ist ein Sonderfall** der gebrochen-rationalen Funktionen.

Einfache Beispiele gebrochen-rationaler Funktionen sind Funktionen der Form $f(x) = \frac{\pm 1}{x-a} + b$
(mit $D = \mathbb{Q} \setminus \{a\}$).

Graph der gebrochen-rationalen Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$:
Polstelle bei x=0



Potenzen
Der Ausdruck a^n heißt **Potenz**. Hierbei ist a die **Basis** und n der **Exponent**.

Es gilt: $a^0 = 1 \; für \; a \neq 0$
und $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \; für \; a \neq 0 \; und \; n \in \mathbb{N}$.

Es gelten die **Potenzgesetze**:

Multiplizieren:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Dividieren:

$$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a:b)^n \quad b \neq 0$$
$$a^n : a^m = a^{n-m} \qquad a \neq 0$$

Potenzieren:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Denke an die Reihenfolge: Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich!

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$3^0 = 1$$
$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Die Potenzgesetze erlauben es, den Bruch $\frac{(ab)^{-2}}{x^2y^{-1}} \cdot \frac{(xy)^2}{a^3b}$ ohne Bruchstrich und mit negativen Exponenten darzustellen:

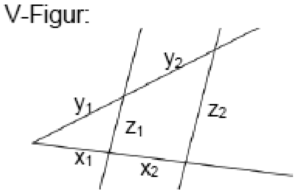
$$\frac{(ab)^{-2}}{x^2y^{-1}} \cdot \frac{(xy)^2}{a^3b} = \frac{a^{-2}b^{-2}x^2y^2}{x^2y^{-1}a^3b}$$
$$= a^{-2}b^{-2}x^2y^2 \cdot x^{-2}y^1a^{-3}b^{-1}$$
$$= \mathrm{a}^{-5}\mathrm{b}^{-3}\mathrm{y}^3$$

M8 4. Strahlensatz und Ähnlichkeit

Strahlensätze
1. Strahlensatz:
Werden zwei Geraden a und b mit dem gemeinsamen Schnittpunkt S von zwei Parallelen g und h geschnitten, dann verhalten sich die Längen irgendwelcher zwei Abschnitte der einen Geraden ebenso wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden.

2. Strahlensatz:
Werden zwei Geraden a und b mit dem gemeinsamen Schnittpunkt S von zwei Parallelen g und h geschnitten, dann verhalten sich die Längen der Parallelstrecken wie die Längen der vom Punkt S zu ihnen hin verlaufenden Abschnitte auf einer der Geraden.

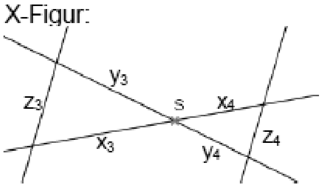
V-Figur:



z.B.: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ (1.Strahlensatz)

bzw.: $\frac{z_2}{z_1} = \frac{y_1 + y_2}{y_1}$ (2.Strahlensatz)

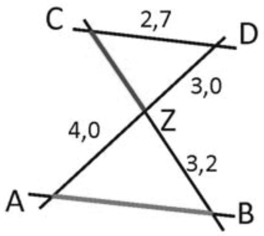
X-Figur:



z.B.: $\frac{x_3}{x_4} = \frac{y_3}{y_4}$ (1.Strahlensatz)

bzw.: $\frac{z_3}{z_4} = \frac{x_3}{x_4}$ (2.Strahlensatz)

Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CZ}$ können mit dem Strahlensatz berechnet werden:



Es gilt:

$$\frac{\overline{AB}}{CD} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZD}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{2{,}7} = \frac{4{,}0}{3{,}0} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{4{,}0}{3{,}0} \cdot 2{,}7 = 3{,}6$$

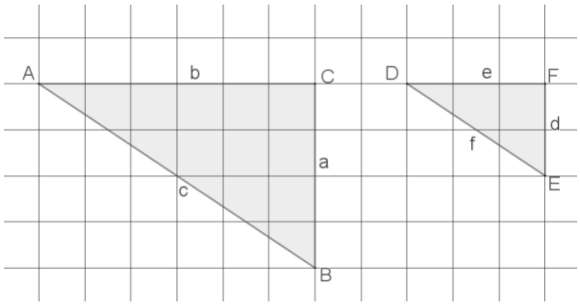
$$\frac{\overline{CZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{ZD}}{\overline{AZ}} \Rightarrow \frac{\overline{CZ}}{3{,}2} = \frac{3{,}0}{4{,}0} \Rightarrow \overline{CZ} = \frac{3{,}0}{4{,}0} \cdot 3{,}2 = 2{,}4$$

Ähnlichkeit

a) Ähnliche Figuren
Zwei Figuren F und G heißen **ähnlich**, wenn die **Verhältnisse** entsprechender Seiten alle gleich sind und entsprechende Winkel gleich groß sind.
Schreibweise $F \sim G$.

Eine ähnliche Figur mit k-fachen Seitenlängen hat den k²-fachen **Flächeninhalt**.
Ein ähnlicher Körper mit k-fachen Seitenlängen hat das k³-fache **Volumen**.

b) Ähnlichkeitssätze für Dreiecke
Zwei Dreiecke sind ähnlich…
…wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.
(WW-Satz)
…wenn sie im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen.
(S:S:S-Satz)
…wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Zwischenwinkel übereinstimmen.
(S:W:S-Satz)
…wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.
(S:s:W-Satz)



Die Dreiecke ΔABC und ΔDEF sind ähnlich, denn nach dem S:W:S-Satz stimmen sie im Verhältnis von zwei Seiten $\left(\frac{a}{d} = \frac{b}{e}\right)$ und dem eingeschlossenen Winkel (beide 90°) überein.