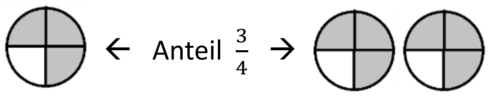
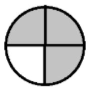
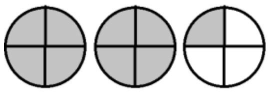
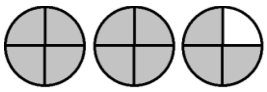
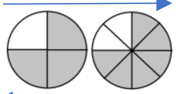
Grundwissen	Beispiele
M6 1.1 Bruchteile und Bruchzahlen	
a) Bruchteile Jeder Quotient aus zwei natürlichen Zahlen lässt sich als Bruch schreiben. $\frac{Z}{N}$ eines Ganzen bedeutet: Man teilt das Ganze in N gleiche Teile und nimmt Z von diesen Teilen. Die Zahl oberhalb des Bruchstrichs ist der Zähler, die untere heißt Nenner. Ein Bruch beschreibt den Anteil einer Größe an einem oder mehreren Ganzen. **Echte Brüche** sind kleiner als 1. **Unechte Brüche** sind größer als 1 und können auch als gemischte Zahl geschrieben werden.	$2:3 = \frac{2}{3}$ ← Zähler ← Nenner  ← Anteil $\frac{3}{4}$ →  $\frac{3}{4}$ echter Bruch  $\frac{9}{4}$ unechter Bruch  $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ gemischte Zahl
b) Kürzen und Erweitern Ein Bruch wird **erweitert**, indem man Zähler und Nenner mit derselben ganzen Zahl **multipliziert**. Ein Bruch wird **gekürzt**, indem man Zähler und Nenner durch dieselbe ganze Zahl **dividiert**.	$\overset{\text{Erweitern}}{\longrightarrow}$ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{12}{18} = \frac{120}{180}$ $\underset{\text{Kürzen}}{\longleftarrow}$ Erweitern →  ← Kürzen Der **Wert** des Bruches **bleibt gleich**.
c) Größenvergleich Bei **gleichem Nenner** (**Zähler**) ist derjenige Bruch größer, der den **größeren Zähler** (**kleineren Nenner**) hat. Haben die zu vergleichenden Brüche unterschiedliche Zähler und Nenner, so bringt man sie durch Kürzen/Erweitern auf den gleichen Nenner (oder den gleichen Zähler).	$\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$ $denn\ 2 < 3$ $\frac{3}{7} > \frac{3}{8}$ $denn\ 7 < 8$ $\frac{3}{8} = \frac{9}{24} < \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{8} = \frac{6}{16} < \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
d) Bestimmung des Hauptnenners mit dem kgV Der kleinste gemeinsame Nenner zweier Brüche heißt Hauptnenner HN. Den Hauptnenner erhält man, indem man zu den Nennern der <u>vollständig gekürzten</u> Brüche das <u>k</u>leinste <u>g</u>emeinsame <u>V</u>ielfache **kgV** ermittelt. Das **kgV der Nenner** liefert also den **Hauptnenner.**	Hauptnenner finden zu $\frac{10}{12}$ und $\frac{39}{45}$: (1) kürzen: $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ und $\frac{39}{45} = \frac{13}{15}$ (2) V(6) = {6;12;18;24;30;36;42;48;…} V(15) = {15;30;45;60;…} → Hauptnenner HN=30 oder (2) Primfaktorenzerlegung $6 = 2 \cdot 3$ und $15 = 3 \cdot 5$ also: kgV(6;15) = $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

e) Teile von Größen **Berechnung des Bruchteils einer Größe:** Dividiere das Ganze durch den Nenner des angegebenen Anteils. Multipliziere das Ergebnis mit dem Zähler.	$\frac{3}{7}$ von 21 € = 21 € :7 ·3 = 9 € $21\,€ \xrightarrow{:7} 3\,€ \xrightarrow{\cdot 3} 9\,€$
Bestimmung des Anteils an einem Ganzen: Man dividiert den Bruchteil durch das Ganze.	$9\,€\ von\ 21\,€ = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$
Berechnung des Ganzen: Man ermittelt einen Teil und berechnet daraus das Ganze.	Wenn 9 € dem Anteil $\frac{3}{7}$ vom Ganzen entsprechen, dann entsprechen 3 € dem Anteil $\frac{1}{7}$. Das Ganze ≙ $\frac{7}{7}$ und ist somit $3\,€ \cdot 7 = 21\,€$.
M6 1.2 Dezimalbrüche	
Brüche lassen sich in **Dezimalschreibweise** („Kommazahlen“) umwandeln. Die 1., 2., 3., … Stelle hinter dem Komma stellen Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, … dar.	52,403 = 5Z + 2E + 4z + 0h + 3t = $52\frac{403}{1000}$
Umwandeln von Brüchen in Dezimalbrüche: (1) Nenner auf 100 bringen (oder eine andere Zehnerstufenzahl) oder (2) Zähler durch Nenner dividieren (das Divisionsverfahren)	(1) $\frac{9}{75} = \frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 0{,}12$ $\frac{15}{8} = \frac{15\cdot 125}{8\cdot 125} = \frac{1875}{1000} = 1{,}875$ oder: (2) $\frac{15}{8} = 15 : 8 = 1{,}875$
Periodische Dezimalbrüche Diese Brüche lassen sich auf den Nenner 9 oder 99 oder 999 etc. bringen.	$\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1\frac{6}{9} = 1{,}666\ldots = 1{,}\overline{6}$ $0{,}\overline{4} = \frac{4}{9}$; $0{,}\overline{523} = \frac{523}{999}$; $\frac{5}{99} = \frac{05}{99} = 0{,}\overline{05}$
Runden von Dezimalbrüchen: Beim Runden auf eine bestimmte Anzahl an Nachkommastellen betrachtet man die Ziffer auf der nächsten Nachkommastelle und rundet nach den gleichen Regeln wie bei natürlichen Zahlen.	425,76 ≈ 426 auf **E** gerundet – 25,76 ≈ – 25,8 auf **z** gerundet / auf 1 Dezimale 6,0052 ≈ 6,005 auf **t** gerundet / auf 3 Dezimalen Vorsicht: 3,0967 ≈ 3,10 auf **h** gerundet / auf 2 Dezimalen
M6 1.3 Addition und Subtraktion rationaler Zahlen	
a) Addieren und Subtrahieren von Brüchen **Gleichnamige** Brüche werden **addiert (subtrahiert),** indem man ihre Zähler **addiert (subtrahiert)** und den gemeinsamen Nenner beibehält. **Ungleichnamige** Brüche werden vor dem **Addieren (Subtrahieren)** durch Erweitern oder Kürzen auf denselben (Haupt-)Nenner gebracht.	$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$ $\frac{3}{4} + \frac{5}{14} = \frac{21}{28} + \frac{10}{28} = \frac{31}{28} = 1\frac{3}{28}$ $\frac{3}{12} - \frac{3}{8} = \frac{6}{24} - \frac{9}{24} = \frac{6-9}{24} = \frac{-3}{24} = -\frac{3}{24} = -\frac{1}{8}$

b) Addieren und Subtrahieren gemischter Zahlen Man macht die Brüche gleichnamig. Dann addiert (subtrahiert) man die Ganzen und die Brüche getrennt voneinander und fasst sie zusammen. oder: Man wandelt die gemischten Zahlen zuerst in Brüche um und addiert (subtrahiert) anschließend.	$3\frac{1}{5}+2\frac{1}{2}=3\frac{2}{10}+2\frac{5}{10}=5\frac{7}{10}$ $3\frac{1}{5}+2\frac{1}{2}=\frac{16}{5}+\frac{5}{2}=\frac{32}{10}+\frac{25}{10}=\frac{57}{10}=5\frac{7}{10}$
c) Addieren und Subtrahieren von Dezimalbrüchen **Dezimalbrüche** werden **stellenweise** addiert (subtrahiert), d.h. „Komma unter Komma“	536,47 + 71,86 = 608,33 536,47 − 71,86 = 464,61
M6 1.4 Multiplikation und Division rationaler Zahlen	
a) Multiplikation und Division von Brüchen Multiplizieren: „Nenner mal Nenner und Zähler mal Zähler“ Dividieren: mit dem Kehrwert multiplizieren Doppelbruch: Im Zähler und/oder im Nenner ist auch ein Bruch. Ersetze den großen Bruchstrich durch ein „ : “ .	$\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{11}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 11}=\frac{15}{77}$ $\frac{3}{8}:\frac{7}{16}=\frac{3}{8}\cdot\frac{16}{7}=\frac{3\cdot 16}{8\cdot 7}=\frac{3\cdot 2}{1\cdot 7}=\frac{6}{7}$ $\frac{\frac{5}{16}}{\frac{3}{4}}=\frac{5}{16}:\frac{3}{4}=\frac{5}{16}\cdot\frac{4}{3}=\frac{5\cdot 4}{16\cdot 3}=\frac{5\cdot 1}{4\cdot 3}=\frac{5}{12}$
b) Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen **Multiplikation:** Dezimalbrüche werden zunächst **ohne** Komma multipliziert. Das Komma wird anschließend so gesetzt, dass der Produktwert genauso viele Dezimalstellen hat, wie beide Faktoren zusammen. **Alternative: gegensinnige Kommaverschiebung** **Division:** Durch eine **gleichsinnige Kommaverschiebung** wird erreicht, dass der Divisor eine natürliche Zahl ist. Dann dividiert man wie bei natürlichen Zahlen. Beim Überschreiten des Kommas im Dividenden wird das Komma im Ergebnis gesetzt.	3,1 · 5,24 155 + 62 + 124 16,244 500 · 0,03 = 5 · 3 = 15 3,68 : 1,6 = 36,8 : 16 = 2,3 Nebenrechnung: 36,8 : 16 = 2,3 - 32 48 - 48 0
c) Potenzschreibweise Für negative Exponenten gilt: $q^{-n}=\frac{1}{q^n}$ Die Basis wird in ihren Kehrbruch umgewandelt, das “-“ der Potenz fällt weg.	$5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{5\cdot 5\cdot 5}=\frac{1}{125}$ $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3}=\left(\frac{7}{2}\right)^{3}=\frac{7\cdot 7\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{343}{8}$

M6 1.5 Verbindung der Grundrechenarten

Es gelten (wie in $\mathbb{Z}$):
- Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich
- Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz

Kommen Brüche und Dezimalbrüche vor, muss entschieden werden, ob es günstiger ist, mit Brüchen oder mit Dezimalbrüchen zu rechnen. Ist ein Bruch beteiligt, der sich nicht in einen endlichen Dezimalbruch umwandeln lässt, muss in diesem Schritt mit Brüchen gerechnet werden.

$$\left(-\frac{4}{5}\right):(-2)^3+0,\overline{3}-\left[-\frac{1}{5}\cdot(-0{,}15)-0{,}53\right]$$
$$=\left(-\frac{4}{5}\right):(-8)+\frac{1}{3}-[-0{,}2\cdot(-0{,}15)-0{,}53]$$
$$=\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}-[0{,}03-0{,}53]$$
$$=\frac{4\cdot 1}{5\cdot 8}+\frac{1}{3}-(-0{,}5)$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{3}+0{,}5$$
$$=\frac{3}{30}+\frac{10}{30}+\frac{15}{30}$$
$$=\frac{28}{30}=\frac{14}{15}$$

M6 2.1 Flächeninhalt

a) Flächenformeln

Rechteck: $A = l \cdot b$ = Länge · Breite

Dreieck: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ Die Höhe kann außerhalb des Dreiecks liegen.

Parallelogramm: $A = g \cdot h$

Trapez: $A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$

Lösungsstrategien:

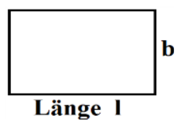
Den Flächeninhalt einer geradlinig begrenzten Figur kann man …

(1) durch <u>Zerlegen</u> in geeignete Figuren oder

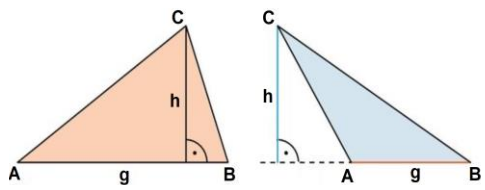
(2) durch <u>Ergänzen</u> von geeigneten Figuren

bestimmen.

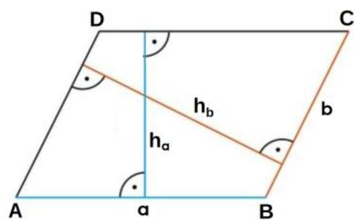
Rechteck:



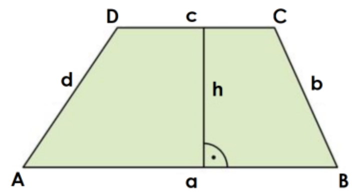
Dreieck:



Parallelogramm:



Trapez:



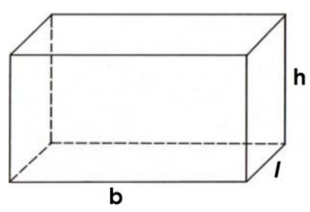
M6 2.2 Volumen

a) Volumenformeln

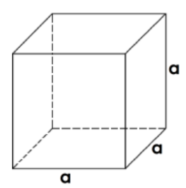
Quader: $V_{Quader} = l \cdot b \cdot h$ = Länge · Breite · Höhe

Würfel: $V_{Würfel} = a \cdot a \cdot a = a^3$ (a: Kantenlänge)

Quader:



Würfel:



b) Volumeneinheiten

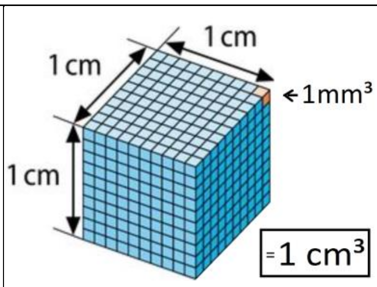
$$\boxed{1\,m^3} \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} \boxed{1\,dm^3 = 1\,\ell} \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} \boxed{1\,cm^3 = 1\,m\ell} \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} \boxed{1\,mm^3}$$

$1\ \text{cm}^3 = 1000\ \text{mm}^3 \quad = 1\ \text{ml}$

$1\ \text{dm}^3 = 1000\ \text{cm}^3 \quad = 1\ \text{l} \qquad \boxed{1\ \text{hl} = 100\ \text{l}}$

$1\ \text{m}^3 \ = 1000\ \text{dm}^3 \quad = 10\ \text{hl}$

$1\ \text{l} \quad = 10\ \text{dl} \quad = 100\ \text{cl} \quad = 1000\text{ml}$



Beispiele:

507 000 cm³ = 507 dm³

93 cm³ = 93 000 mm³

5,4321 m³ = 5432,1 dm³

31 cm³ = 0,031 l = 3,1 cl

50 cm³ = 0,050 l = 5,0 cl

M6 3 Prozentrechnung, Daten und Diagramme

a) Grundbegriffe der Prozentrechnung

Prozent ist eine andere Schreibweise für Hundertstel („pro cento“, pro Hundert).

Grundwert (Gw): das Ganze, also 100%

Prozentsatz (Ps): Anteil am Grundwert

Prozentwert (Pw): Bruchteil, Teil des Ganzen

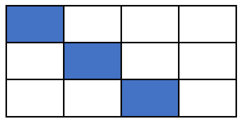
Beispiele:

$0{,}7 = \frac{70}{100} = 70\ \%$ $\qquad 0{,}625 = \frac{62{,}5}{100} = 62{,}5\ \%$

Grundwert: 12 Felder

Prozentwert: 3 Felder

Prozentsatz: $\frac{3}{12}$ = 0,25 = 25%



b) Anwendung der Prozentrechnung

Lösungsstrategien:

(1) Grundgleichung: $\boxed{Pw = Ps \cdot Gw}$

$\boxed{Gw = \frac{Pw}{Ps}}$

$\boxed{Ps = \frac{Pw}{Gw}}$

(2) Schlussrechnung / Dreisatz

Lisa kauft einen Pulli und erhält 9 % Rabatt auf den Preis in Höhe von 30 €.

(1) Pw = 9 % von 30 € = 0,09 · 30 € = 2,70 €

(2)
100 % ≙ 30,00 € : 100
1 % ≙ 0,30 € · 9
9 % ≙ 2,70 €

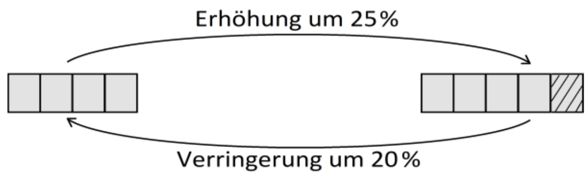
In einer Regentonne haben sich 45 ℓ Wasser gesammelt. Damit ist sie zu 15 % gefüllt.

(1) Gw = 45 ℓ : 0,15 = 300 ℓ ≙ 100 %

(2)
15 % ≙ 45 ℓ : 15
1 % ≙ 3 ℓ · 100
100 % ≙ 300 ℓ

c) Prozentuale Änderung

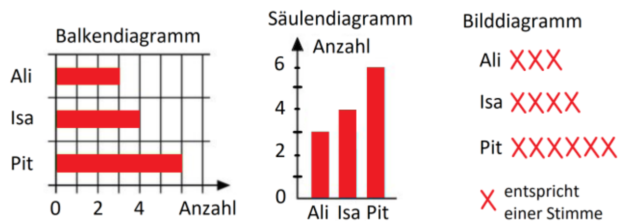
Bei der Prozentrechnung ist entscheidend, auf welchen **Grundwert** sich die gegebenen Angaben beziehen.



c) Diagramme

zur Darstellung von **Anzahlen**, aber auch für Änderungen und Trends besonders geeignet:

Balken-, Säulen-, Bilddiagramm



zur Darstellung von **Anteilen** besonders geeignet:

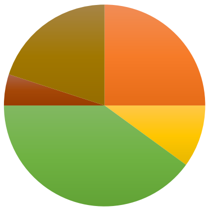
Kreis- und Streifendiagramm

Kreisdiagramm:

1 bzw. 100 % ≙ 360°

$\frac{1}{5}$ bzw. 20 % ≙ 72°

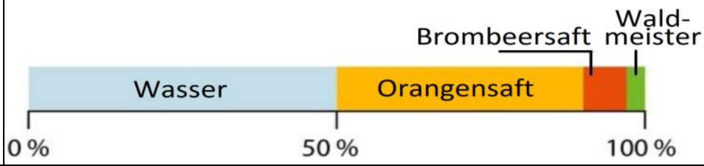
$\frac{1}{100}$ bzw. 1 % ≙ 3,6°



Streifendiagramm:

Beispiel: 100 % ≙ 10 cm

1 % ≙ 1 mm

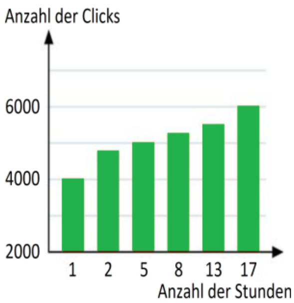


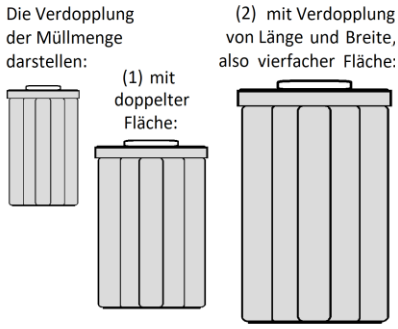
d) irreführende Diagramme

Ziel: Betrachter manipulieren

Möglichkeiten:

- Einteilung an den Achsen verändern
- Werte der y-Achse nicht bei 0 beginnen lassen
- gezieltes Weglassen von Daten
- Verwendung von Flächenvergrößerungen





e) Daten und Zufall

Die **absolute Häufigkeit** ist die Anzahl, wie häufig eine bestimmte Ausprägung vorkommt.

Die **relative Häufigkeit** eines Ergebnisses ist der Anteil des Ergebnisses an der Gesamtzahl aller Ergebnisse.

Ein **Zufallsexperiment** wird vom Zufall beeinflusst. Ein Ergebnis tritt mit einer bestimmten **Wahrscheinlichkeit** ein.

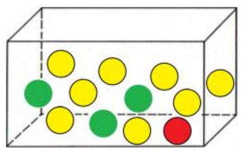
Das **arithmetische Mittel M** ist der Durchschnittswert:

$$M = \frac{\textit{Summe der Einzelwerte}}{\textit{Anzahl der Einzelwerte}}$$

(1) Das Werfen eines Würfels ist ein **Zufallsexperiment**. Wenn der Würfel nicht gezinkt ist, ist die **Wahrscheinlichkeit**, die Augenzahl 1; 2; 3; 4; 5 oder 6 zu werfen, jeweils $\frac{1}{6}$.

(2) Auf dem Spielplatz essen 28 der 35 Kinder gerne Eis. Die absolute Häufigkeit der Ausprägung „isst gerne Eis" ist 28, die relative Häufigkeit ist $\frac{28}{35} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 80\ \%$.

(3) Gina zieht mit verbundenen Augen eine Kugel aus einer Kiste. Es ist **sicher**, dass Gina eine farbige Kugel zieht und es ist **unmöglich**, dass sie eine weiße Kugel zieht. Eine rote, gelbe oder grüne Kugel zu ziehen, ist **möglich**. Es ist **wahrscheinlich**, dass Gina eine gelbe Kugel zieht. Es ist **unwahrscheinlich** eine rote Kugel zu ziehen.



(4) Die Tabelle zeigt eine Notenverteilung. Die absolute Häufigkeit f. Note 1 ist 4, die relat. Häufigkeit ist $\frac{4}{20} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 20\ \%$

Merkmal	Ausprägung					
Note	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Anzahl	4	6	7	2	1	0

Das arithmetische Mittel berechnet sich so:

$$\frac{4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 6}{4 + 6 + 7 + 2 + 1 + 0} = \frac{50}{20} = 2{,}5$$