Grundwissen	Beispiele

Definition Zufallsexperiment, relative Häufigkeit, Baumdiagramm, Zählprinzip, Laplace-Wahrscheinlichkeit

Zufallsexperimente sind Experimente, deren Ergebnis zufällig ist.
Die Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man zur **Ergebnismenge Ω** zusammen.
Für die Anzahl der Elemente einer Menge Ω schreibt man |Ω| („Mächtigkeit der Menge Ω“)
Jede Teilmenge von Ω entspricht einem **Ereignis**.
Besondere Ereignisse:

$E_1 = \Omega$ „sicheres Ereignis“

$E_2 = \{\ \}$ „unmögliches Ereignis“

$E_3 = \{ \omega_i \}$ Elementarereignis mit nur einem Element

Das Ereignis E tritt ein, wenn das **Ergebnis ω** des Experiments ein Element von E ist.

Wurf einer Münze:
$\Omega = \{ W, Z \}$, wobei gilt: W:Wappen, Z: Zahl
$|\Omega| = 2$

Wurf eines Würfels:
A = gerade Zahl = { 2 ; 4 ; 6 }
B = ungerade Zahl = { 1 ; 3 ; 5 }
C = Primzahl = { 2 ; 3 ; 5 }
D = Zahl größer als 3 = { 4 ; 5 ; 6 }
Würfelt man also eine 4, so sind die Ereignisse A und D eingetreten, aber nicht B und D.

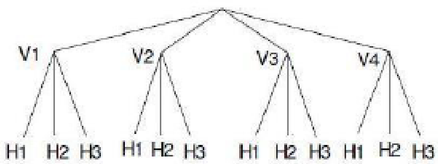
Führt man ein Zufallsexperiment **n-mal** durch und tritt dabei das Ereignis A genau **k-mal** auf, so heißt $\frac{k}{n}$ die **relative Häufigkeit** diese Ergebnisses.
Je größer n ist, umso weniger schwankt die relative Häufigkeit um einen festen Zahlenwert. Man spricht dabei vom sogenannten **Gesetz der großen Zahlen.**

n-maliger Wurf eines Würfels:
n = 100

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Würfe	17	15	21	20	11	16
Relative Häufigkeit	17 %	15 %	21 %	20 %	11 %	16 %

Mit **Baumdiagrammen** oder allgemeiner nach dem **Zählprinzip** lässt sich die Gesamtzahl an Möglichkeiten ermitteln.
5 verschiedene Buchstaben können zu 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = **5!**
(„5 Fakultät“) = 120 verschiedenen Worten zusammengesetzt werden.
Achtung: Die Buchstaben des Wortes SOMMERMONAT können zu $\frac{11!}{2! \cdot 3!} = 3326400$ verschiedenen Wörtern zusammengesetzt werden, da der Buchstabe O 2-mal und der Buchstabe M 3-mal vorkommt.

Ein Restaurant bietet für das Mittagsmenü 4 Vorspeisen und 3 Hauptgerichte an.



Es gibt 4 · 3 = 12 Möglichkeiten für die Zusammenstellung der Speisen, d.h. |Ω| = 12

Ein Zufallsexperiment heißt **Laplace-Experiment**, wenn jedes der möglichen Ereignisse **gleich wahrscheinlich** ist.
Bei Laplace-Experimenten gilt für die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses E:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \text{„}\frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}\text{“}$$

Eine Laplace-Münze wird 5-mal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse.
A = Genau 4-mal Wappen
B = Mindestens 2-mal Wappen

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32}$ und $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{26}{2^5} = \frac{26}{32}$

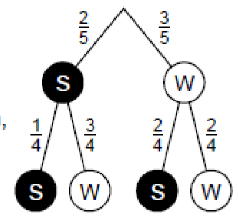
Mehrstufige Zufallsexperimente

Pfadregeln:

1. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ergebnisses** ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.
2. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören.

Beispiel:

Aus einer Urne mit zwei schwarzen und drei weißen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, ohne diese zurück zu legen.



Ergebnisraum:

$\Omega = \{SS, SW, WS, WW\}$

$P(SS) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ $\qquad$ $P(WW) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

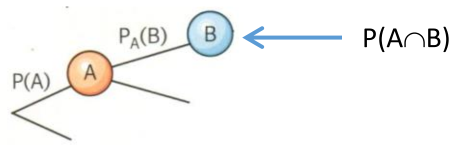
P(„verschieden“) = P(SW) + P(WS) =

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$

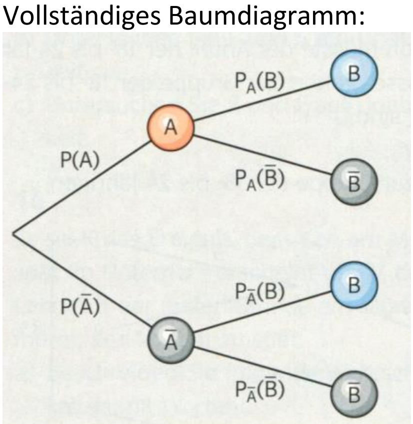
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition: $P_A(B)$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B, falls (unter der Bedingung, dass) A bereits eingetreten ist.

Es gilt: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$



Vollständiges Baumdiagramm:

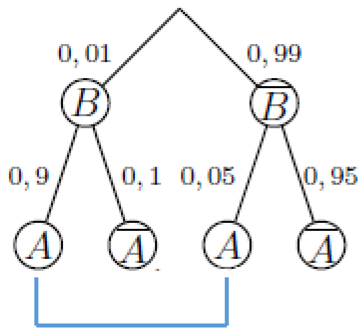


Für die Berechnung von $P(A \cap B)$ und weiteren zusammenhängenden Ereignissen hilft oft die Vierfeldertafel:

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Beispiel: In einem Betrieb kommt es an 1% aller Arbeitstage zu einem Brand (B). In 90% dieser Fälle wird ein automatischer Alarm ausgelöst (A). Liegt kein Brand vor, so gibt es mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% einen Fehlalarm.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es wirklich brennt, wenn ein Alarm ausgelöst worden ist?

Lösung:



P(A) ist die Summe der beiden Pfadwahrscheinlichkeiten (siehe mehrstufige Zufallsexperimente)

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,01 \cdot 0,9}{0,01 \cdot 0,9 + 0,99 \cdot 0,05} = 0,154$$